

22 Теорема Банаха - Уиллингхауса

$\exists X, Y$ - метр. нормир. пр-ва; $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n = 1, 2, \dots$. $E = \{x \in X: \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| < \infty\}$ - метр. во 2й категории. Тогда $\exists M > 0: \|A_n\| \leq M, \forall n \geq 1$

Введем $R_m = \{x \in X: \|A_n x\| \leq m\}$; $n, m \in \mathbb{N}$. Отметим, что R_m - замкнутое ($\|A_n x_k\| \leq m, k \rightarrow \infty$, в силу непр-ти $\|A_n x\| \leq m$); Введем $R_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_{nm}$; (оно тоже замкнутое) Введем (также, г-и, что) $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$. Д-и это.

1) $x \in E \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| < \infty \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, m.2. \|A_n x\| \leq m \forall n \geq 1$
 $\Rightarrow x \in R_{nm} \forall n \geq 1 \Rightarrow x \in R_m \Rightarrow x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$.

2) $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m \Rightarrow \exists R_m \ni x \Rightarrow x \in R_{nm} \forall n \geq 1 \Rightarrow \|A_n x\| \leq m \forall n$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq m < \infty \Rightarrow x \in E$. Отметим, что R_m

замкнуто; т.к. E - второй категории, то $\exists R_m$ не являющаяся никуда не пустым, в ней есть шарик:

$\exists B_\varepsilon(x_0) \subset R_m. \forall x \in X$. Р-и $z = x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B_\varepsilon(x_0) \subset$

$\subset R_m$ Если $z \in R_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_{nm} \Rightarrow \|A_n z\| \leq m, \forall n \geq 1$

$m \geq \|A_n z\| = \|A_n x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{A_n x}{\|x\|}\| \geq \|A_n x\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|x\|} - \|A_n x_0\| \geq$

$\geq \frac{\|A_n x\| \varepsilon}{2\|x\|} - m$; $\frac{m}{\varepsilon} \geq \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} \forall x \in X \Rightarrow \|A_n\| \leq M$

$\forall n \geq 1$. Ч.Т.Д. ■

Сл If X банахово, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| < \infty, \forall x \in X \Rightarrow \exists M > 0$ такое, что $\|A_n\| \leq M, \forall n \geq 1$.
 ▲ $E = X$ - полное метр. нормир. $\Rightarrow$ полн. метрич. пр-во
 $\Rightarrow \{A_n\}$ Б-ра $\Rightarrow X$ - метр. во 2й категории $\Rightarrow \{A_n\}$ Б-УЗ. ■